Exercice 13

- Montrons que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_E$, donc

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E \qquad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

  Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} f^2$. D'où le résultat.

- Montrons que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = f^2(x) = f\left(f(x)\right)$$

  En posant $x' = f(x) \in E$, on a donc $y = f(x')$. On en déduit que $y \in \operatorname{Im} f$. D'où le résultat.

- Montrons la première équivalence.
  - Sens réciproque : supposons $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Par ce qui précède, on a déjà $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. Soit donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$. On a

$$f^2(x) = f\left(f(x)\right) = 0_E$$

    Ainsi, en posant $y = f(x)$, on a d'une part $y \in \operatorname{Ker} f$. D'autre part, comme $y = f(x)$, on a $y \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, $y \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ par hypothèse. D'où $y = 0$. On en déduit que $f(x) = 0$, càd $x \in \operatorname{Ker} f$. Par arbitraire sur x, $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$.

  - Sens direct : supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Soit $y \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. On a $y \in \operatorname{Im} f$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, $y \in \operatorname{Ker} f$ donc

$$f(y) = f(f(x)) = 0_E$$

    Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Or, $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Finalement, $f(x) = 0$ donc $y = 0$. Par arbitraire sur y, on a $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- Montrons la seconde équivalence.
  - Sens réciproque : supposons $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$. Montrons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Par ce qui précède, on a déjà $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$. Soit donc $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, comme $x \in E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$,

$$\text{il existe } x_K \in \operatorname{Ker} f \text{ et } x_I \in \operatorname{Im} f \text{ tels que } x = x_K + x_I$$

    Ainsi, comme f est linéaire,

$$f(x) = f(x_K + x_I) = f(x_K) + f(x_I) = 0_E + f(x_I) = f(x_I)$$

    On en déduit que $y = f(x) = f(x_I)$. Or, comme $x_I \in \operatorname{Im} f$, il existe $z \in E$ tel que $x_I = f(z)$. Ainsi,

$$y = f(x_I) = f(f(z)) = f^2(z)$$

    donc $y \in \operatorname{Im} f^2$. Par arbitraire sur y, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$.

– Sens direct : supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Montrons que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$. Une inclusion est évidente. Montrons alors que $E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$. Étant donné $z \in E$, on peut écrire

$$x = x - z + z$$

On cherche alors z tel que $x - z \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, cela revient à montrer que

$$\exists z \in \operatorname{Im} f \qquad x - z \in \operatorname{Ker} f$$

Or, $z \in \operatorname{Im} f$ si et seulement s'il existe $x' \in E$ tel que $z = f(x')$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \exists z \in \operatorname{Im} f \qquad x - z \in \operatorname{Ker} f \\
\iff & \exists x' \in E \qquad x - f(x') \in \operatorname{Ker} f \\
\iff & \exists x' \in E \qquad f(x - f(x')) = 0 \\
\iff & \exists x' \in E \qquad f(x) - f^2(x') = 0 \\
\iff & \exists x' \in E \qquad f(x) = f^2(x') \\
\iff & f(x) \in \operatorname{Im} f^2
\end{aligned}$$

Or, $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, donc la dernière assertion ci-dessus est vraie. Finalement, en posant $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$, on a

$$x = \underbrace{x - f(x')}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{f(x')}_{\in \operatorname{Im} f}$$

D'où $x \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Par arbitraire sur x, $E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. D'où le résultat.

Exercice 17

Première assertion, sens réciproque : montrons que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$. Soit donc $x \in \operatorname{Ker} p$. Alors

$$q(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(0_E) = 0_E$$

d'où $x \in \operatorname{Ker} q$. D'où le résultat.

Première assertion, sens direct : on suppose $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $p \circ q = p$. Soit $x \in E$. Comme $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, on peut écrire

$$x = x_K + x_I \qquad \text{avec } x_K \in \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad x_I \in \operatorname{Im} q$$

Alors on a $q(x_K) = 0_E$ et $q(x_I) = x_I$, donc

$$\begin{aligned}
(p \circ q)(x) &= p(q(x_K + x_I)) \\
&= p(q(x_K) + q(x_I)) \qquad \text{par linéarité} \\
&= p(x_I)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
p(x) &= p(x_K + x_I) \\
&= p(x_K) + p(x_I) \\
&= 0 + p(x_I) \qquad \text{car } x_K \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p
\end{aligned}$$

D'où $p(x) = p \circ q(x)$.

Deuxième assertion, sens réciproque : montrons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$. Soit donc $y \in \operatorname{Im} p$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Dans ce cas,

$$y = p(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x))$$

donc $y \in \operatorname{Im} q$. D'où le résultat.

Deuxième assertion, sens direct : on suppose $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $p \circ q = q$. Soit donc $y \in E$. Comme $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, on peut écrire

$$y = y_K + y_I \qquad \text{avec } y_K \in \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad y_I \in \operatorname{Im} q$$

Alors d'une part,

$$q(y) = y_I$$

et d'autre part,

$$(p \circ q)(y) = p(q(y_K + y_I)) = p(y_I)$$

Or, $y_I \in \operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p$, donc $p(y_I) = y_I$. Ainsi

$$(p \circ q)(y) = y_I$$

Par arbitraire sur y, on a donc $p \circ q = q$.

Exercice 20

1) Il suffit de montrer que φ_k est linéaire.
2) Montrons que $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est libre. Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On suppose que

$$\lambda_0\varphi_0 + \ldots + \lambda_n\varphi_n = 0_{E^*}$$

Ainsi, pour tout $P \in E$, on a

$$\begin{aligned} &\lambda_0\varphi_0(P) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(P) = 0_{E^*}(P) \\ \Longrightarrow\ &\lambda_0 P(0) + \ldots + \lambda_n P(n) = 0 \end{aligned}$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On affirme qu'il existe un polynôme $L_i \in E$ qui vérifie :

$$L_i(i) = 1 \qquad \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\} \quad L_i(j) = 0$$

En effet, c'est le polynôme de Lagrange associé aux points $(i, 1)$ et $(j, 0)$ avec $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$. Alors, avec $P = L_i$, on obtient que

$$\lambda_i \times 1 = 0$$

D'où $\lambda_i = 0$. Par arbitraire sur i, on a donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$.
3) On pose $\psi : P \mapsto \displaystyle\int_0^n P(t)dt$. Montrons que ψ est une forme linéaire sur E. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \psi(\alpha P + \beta Q) &= \int_0^n (\alpha P + \beta Q)(t)dt \\ &= \int_0^n [\alpha P(t) + \beta Q(t)]\, dt \\ &= \alpha \int_0^n P(t)dt + \beta \int_0^n Q(t)dt \\ &= \alpha\psi(P) + \beta\psi(Q) \end{aligned}$$

On en déduit que ψ est linéaire. De plus ψ est clairement une application de E dans $\mathbb{R}$ donc $\psi \in E^*$. Par la question précédente, on en déduit qu'il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\psi = \lambda_0 \varphi_0 + \ldots + \lambda_n \varphi_n$$

Ainsi, pour tout $P \in E$, on a donc

$$\psi(P) = \lambda_0 \varphi_0(P) + \ldots + \lambda_n \varphi_n(P)$$

$$\int_0^n P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \ldots + \lambda_n P(n)$$